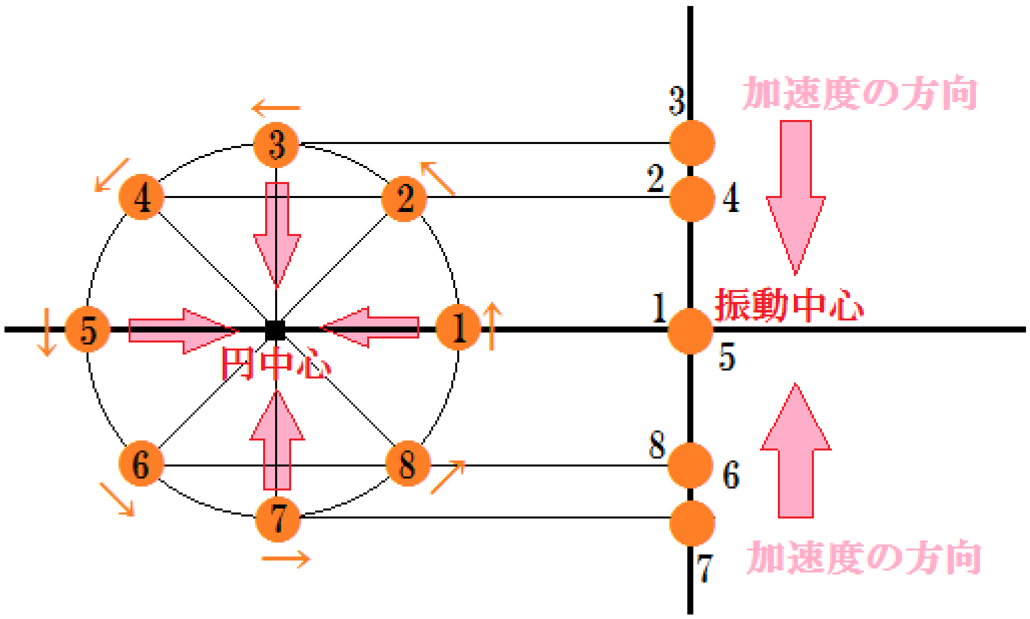
6. 単振動

単振動は円運動の正射影である…と表現される教科書や参考書が多い。確かにその通りなのだが、ではなぜ「円運動の影が単振動の軌道と一致する」と考えられているのだろうか。

円運動をする物体には円軌道の中心に常に「向心力が」かかる。すなわち、円運動する物体は円の中心に向かって加速度運動しているのだ。一方ばねの振動のような単振動は振動の中心に向かって常に「復元力」が働いている。すなわち、**単振動する物体も振動の中心に向かって加速度運動している**のだ。



上の図は水平面上を等速円運動するおもりの運動と、その左からの正射影を右側にあるスクリーンに表した図である。おもりが１から８へ回転すると、スクリーン上にも１から８へ影が移動する。どちらも中心に向かって加速度運動していることが分かる。古典物理学者はそのことに注目し、「**単振動する物体の軌道は円運動の正射影と一致する**」と主張した。

しかし単振動している物体の復元力は、位置によって異なっていることが分かる。復元力をF[N]とし、物体がいる位置をx[m]、比例定数をKとすると、以下の式が成り立つ。

$$\boldsymbol{F = -Kx}$$

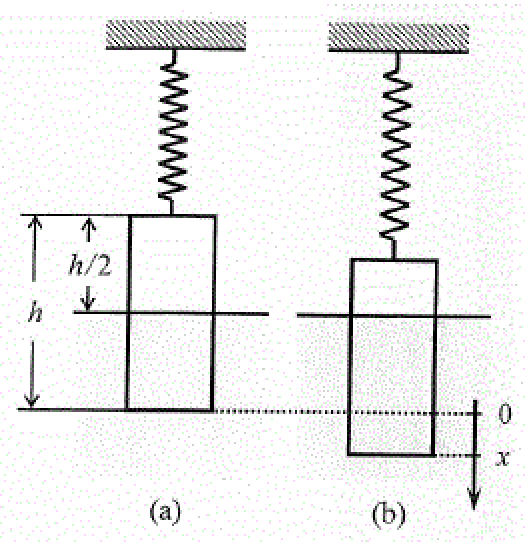
復元力は、振動中心からの変位に対して常に逆向きにかかっていることに注意したい。

【6-例】信州大学教育学部 2014 第 1 問

底面積S[m²]、高さh[m]、密度ρ[kg/m³]の円柱状の物体を、ばね定数k[N/m]のばねの下端に取り付け、密度$\rho_1(<\rho)$ [kg/m³] に浸したところ、図(a)のように、物体のちょうど半分が液体中に入ったところでつり合い、物体が静止した。

次に、物体を静止している状態から$h/_4$[m]だけ押し下げて静かに放すと、物体は上下に周期的に振動し始めた。

これらのことを踏まえて、次の問いに答えよ。ただし、物体は液体中を滑らかに運動し、横揺れや回転、物体の運動による液面の位置の変化、液面の抵抗や表面張力は無視でき、重力加速度の大きさをgとする。



問 1　物体が静止しているときの、ばねの自然長からの伸びℓ_0[m]を求めよ。

→ 物体が静止しているので、力のつりあいの式を立式する。

問 2　物体が静止しているときの物体の底面の位置を原点、鉛直下向きを正とする座標軸をとる。物体が振動している場合、物体の底面の位置がx [m]のとき（図(b)参照）に、物体に働く力F[N]を符号も含めて求めよ。

→ 物体が振動(すなわち加速度運動)するのは、物体にかかる力がつり合っていないためである。力の矢印を描き、物体に働く力(の合力)F[N]の様子を数式にする。そして、このF[N]によって物体が単振動するので、F[N]が復元力に相当するはずであるが…。

問 3　物体の周期T[s]を求めよ。

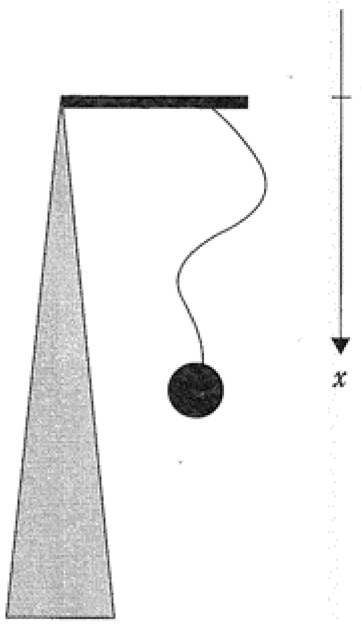
→ 復元力による運動方程式より、この単振動の角振動数がわかる。

「角振動数」＝ 単位時間に刻む位相の大きさ

「　位相　」＝ 単振動の様子を円運動に捉えた時に、物体が原点から刻む角度

「　周期　」= 物体が運動して元の位置に戻るまでの時間

【6-1】首都大学東京 2008 第 1 問



バンジージャンプの仕組みを、簡単なモデルによって考えてみよう。図のように塔の頂点の高さから飛び降りる人間を、質量Mの小物体と考える。この小物体に自然長Lのゴムロープの一端が留められており、他端は塔に固定されているとする。塔の高さはL に比べて十分大きいとする。使用するゴムロープは張力が働かないときはゆるむが、自然長Lより伸びて張力が働く時にはばね定数kのばねとして働く。塔の頂点の位置を原点としてx座標を考え、下向きに正にとる。重力加速度の大きさをgとし、空気抵抗やゴムロープの質量は無視する。人間は時刻$t = 0$に初速度ゼロで真下に飛び降りたとして、以下の問いに答えよ。

ただし、解答にはM , L , k , g のみを用いよ。

問 1　ゴムロープが伸び始める瞬間の時刻、および人間の速度を求めよ。

問 2　その後、ゴムロープが伸びることにより、ゴムの復元力と人間に対する重力とがつり合った瞬間の、人間の位置を求めよ。また、このときの人間の速度を、エネルギー保存を考慮することにより求めよ。

問 3　さらに、人間はある地点まで落下すると、上昇に転じる。その瞬間の人間の位置を求めよ。

問 4　問 2 の力がつり合った瞬間から上昇に転じるまでの時間を求めよ。

問 5　上昇に転じた後、最高点に達した時の人間の位置を求めなさい。

【6-2】名古屋大学 2011 第 1 問

図 1 のように、ばね、円盤、おもり、とめ具からなる装置がある。ばねはフックの法則に従い、ばね定数はkで、鉛直方向に伸縮する。ばねの一端は水平な地面に、他端は水平に保たれた厚さの無視できる硬い円盤の中心に固定されている。円盤の中心に質量mのおもりが載せられており、小さなとめ具で固定されている。なお、このとめ具は遠隔操作でおもりの固定を外すことができる。ばねの自然長での円盤の中心を原点 O とし、鉛直上向きにy軸を取る。また、重力は鉛直下向きに作用し、重力加速度をgとする。ばね、円盤、とめ具は質量を無視できる。以下の設問に答えよ。

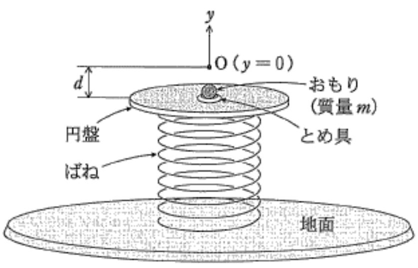


図 1

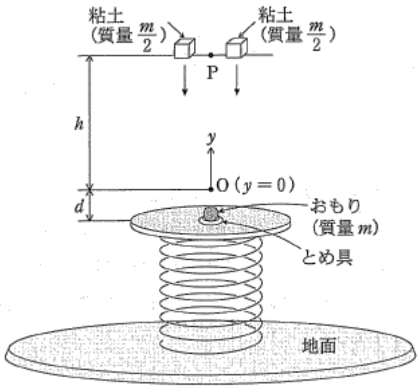


図 2

問 1　はじめに、円盤はばねが自然長からdだけ縮んだ位置で静止していた。このばねのばね定数kを、m, g, d から適切なものを用いて表せ。

図 2 のように点 O から高さhだけ上方の点を点 P とする。点 P を含む水平面内の、点 P に対して互いに点対称な関係にある 2 つの位置から、質量 $m/2$ で大きさが無視できる 2 つの粘土を同時に静かに放した。粘土は自由落下し、おもりやとめ具の触れることなく円盤と完全非弾性衝突した。その直後から、粘土、おもりと一体となったまま、水平を保って単振動した。

問 2　粘土が円盤に衝突した直後の円盤の速さV_1を、m, g, d, h から適切なもの用いて表せ。

問 3　円盤がおもりと 2 つの粘土と一体となって単振動している時の円盤の座標をy、上向きの加速度をaとする。円盤、おもり、粘土を一体とみなして、その運動方程式を立式せよ。また、単振動の中心位置を示す座標y_aを求めよ。また、解答にはy , a , m, g, k , h から適切なものを用いよ。

問 4　問 3 の単振動中にとめ具を遠隔操作し、ばねが最も縮んだ瞬間におもりの固定を外した。このおもりの円盤から離れた直後の速さV_2はいくらか。

【6-3】早稲田大学教育学部 2009 第 1 問

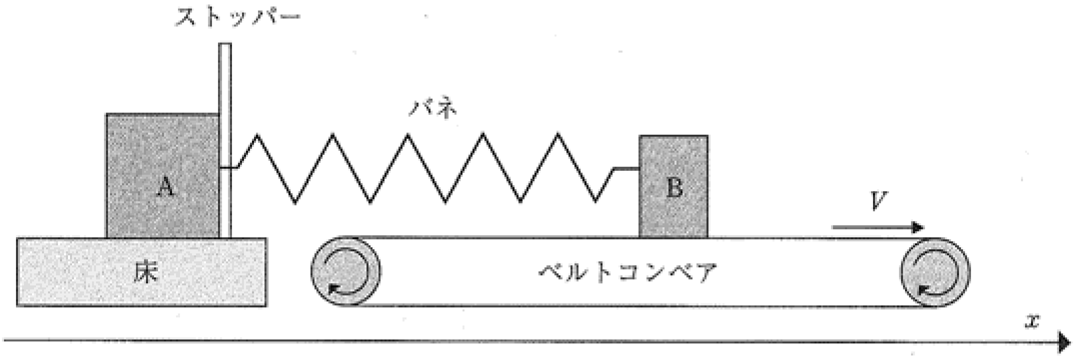
自然長がℓ、ばね定数がkであるばねの一方の端に物体 A、他方の端に質量mの物体 B が取り付けられている。物体 A はストッパーがあるために、ストッパーより右側には動けない。また、物体 A に左向きの力が加わり、その大きさがF以上になると、物体 A はストッパーから離れてしまう。

下図のように、ベルトコンベア上での物体の運動を考える。ベルトと物体 B の静止摩擦係数はμ、動摩擦係数は 0 とする。ばねの長さが自然長で、物体 B が静止していた状態に対し、上面のベルトが一定の速さVでx軸正の向きに運動するようにベルトコンベアを動かし始めた時刻を$t = 0$とする。ただし、物体 B は常にベルトコンベアに接しているものとする。重力加速度の大きさをgとして、次の問いに答えよ。

問 1　物体 B に働く垂直抗力、物体がベルト上を滑り出す時刻をそれぞれ求めよ。

問 2　その後、物体 A がストッパーから離れなければ、物体 B は単振動をする。この単振動の中心位置はストッパーからみてどれだけ離れているか。また、この単振動の振幅はいくらか。

問 3　物体 A がストッパーから離れないとき、物体が再びベルトと同じ速度になるのは、ばねの長さがいくらになった時か。



問 4　その後、物体 B は上面のベルトに対して静止とすべり運動を繰りかえす。いま、物体 B がベルト上を滑り出してから、再びベルトに対して静止するまでの時間をτとすると、この周期運動の周期はいくらと表されるか。

問 5　ここで、物体 B の速度および加速度の時刻 0 からTまでの時間変化の様子を、横軸を時間、縦軸を物体 B の速度または加速度としてそれぞれグラフで表せ。